Historias de Matemáticas

Del infinito a la incompletitud: la teoría de conjuntos y la crisis de los fundamentos matemáticos

From the infinite to the undecidable: set theory and the foundational crisis in mathematics

Daniel Martín-Cudero

Revista de Investigación

Volumen XVI, Abr'26, pp. 109–125, ISSN 2174-0410

1 de abril de 2026

Resumen

En el siglo XIX, Georg Cantor abrió una grieta irreparable en el universo matemático al concebir la existencia de infinitos de diferentes tamaños. Esta intuición revolucionaria, que desafiaba a la tradición aristotélica, dio pie a la teoría de conjuntos, pero también generó una serie de paradojas que obligaron a una redefinición radical de las bases de las matemáticas. Este artículo recorre ese proceso, desde la aritmética transfinita de Cantor, hasta los límites computacionales establecidos por Turing y Church, pasando por el programa formalista de Hilbert, las paradojas lógicas y los teoremas de incompletitud de Gödel. A lo largo del camino, se evidencian no solo las tensiones entre intuición y formalismo, sino también el papel del pensamiento humano en el corazón mismo de la verdad matemática. Así, más que un recorrido técnico, es una reflexión filosófica sobre los alcances —y los límites— del pensamiento racional.

Palabras Clave: Infinito, Teoría de conjuntos, Paradojas, Fundamentos de las matemáticass, Filosofía de las matemáticas.

Abstract

In the nineteenth century, Georg Cantor opened an irreparable rift in the mathematical universe by conceiving the existence of infinities of different sizes. This revolutionary intuition, which defied the Aristotelian tradition, gave birth to set theory but also provoked a series of paradoxes that demanded a radical redefinition of the foundations of mathematics. This article traces that development: from Cantors transfinite arithmetic, through the logical paradoxes, Hilberts formalist programme, and Gödels incompleteness theorems, to the computational limits established by Turing and Church. Along this trajectory, tensions between intuition and formalism become evident, as does the role of human thought at the very heart of mathematical truth. Rather than offering a technical analysis, this essay proposes a philosophical reflection on the scope —and the limits— of rational thought.

Keywords: Infinity, Set theory, Paradoxes, Foundations of mathematics, Philosophy of mathematics.

1. Introducción

La tensión entre la formalización matemática del infinito y su interpretación filosófica ha sido objeto de profundas reflexiones desde el siglo XIX. Para Immanuel Kant, el infinito no podía ser un objeto real del conocimiento sino solo un concepto regulativo, una idea que guía el entendimiento pero que nunca se agota en una intuición sensible. Kant veía los números infinitos como "ideas del intelecto" [24], que ayudan a la mente a pensar más allá de lo finito, pero sin pretender completarse. En su obra *Crítica de la razón pura*, Kant [23] afirma: "el concepto del infinito no es dado por intuición alguna, sino que es el mero concepto de un absoluto que no puede ser contenido en la experiencia, sino que sirve para la unidad de las series regidas por una ley" (p. 488). Así, el infinito es para Kant un ideal necesario, pero no una entidad cognoscible en sí misma.

Con la irrupción de Georg Cantor y la matemática moderna a finales del siglo XIX, esta visión kantiana entró en conflicto con una nueva realidad: el infinito podía existir como objeto formal, una entidad definida por axiomas, en lugar de un mero ideal regulativo. Cantor introdujo el tratamiento de los infinitos como objetos matemáticos concretos, dotados de propiedades y jerarquías. Como señala Ferreirós [13], las ideas revolucionarias de Cantor "redefinieron el infinito, desplazándolo de una abstracción filosófica a una realidad matemática" (p. 410). Sin embargo, esta idea también reavivó viejas preguntas filosóficas: £existe el infinito como algo "real" o es sólo una construcción del intelecto? Como sostiene Dummett [7], "el estatus ontológico de los conjuntos infinitos sigue siendo un profundo problema filosófico, que entrelaza la lógica, las matemáticas y la metafísica" (p. 95). La cuestión de si tales objetos poseen un estatus ontológico real o son meras construcciones conceptuales siguió abierta.

Cantor no solo aceptó la existencia del infinito, sino que lo estructuró y lo clasificó, desarrollando la teoría de conjuntos y estableciendo que existen diferentes tamaños de infinito. Esta audaz propuesta no solo revolucionó las matemáticas, sino que también desató una serie de debates filosóficos que cuestionaron los cimientos mismos de la disciplina [32]. La teoría de Cantor permitió demostrar que el conjunto de los números reales es más grande que el conjunto de los números naturales, introduciendo la noción de cardinalidad infinita y estableciendo que no todos los infinitos son iguales. Este descubrimiento llevó a la formulación de la *Hipótesis del Continuo*, que plantea la pregunta de si existe un conjunto cuyo tamaño sea estrictamente mayor que el de los números naturales, pero estrictamente menor que el de los números reales. Sin embargo, el entusiasmo por estas nuevas ideas se vio empañado por la aparición de paradojas que amenazaban la coherencia de la teoría de conjuntos. La más famosa de estas es la *Paradoja de Russell*, que demuestra que la colección de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos no puede ser un conjunto bien definido sin generar una contradicción [30]. Esta y otras antinomias llevaron a la necesidad de una reformulación rigurosa de los fundamentos de las matemáticas.

En respuesta a estas crisis, matemáticos como Henri Poincaré, Ernst Zermelo y David Hilbert buscaron establecer una base sólida para la teoría de conjuntos. Zermelo introdujo una axiomatización de la teoría de conjuntos que evitaba las paradojas, mientras que Hilbert propuso su *programa formalista*, que aspiraba a demostrar la consistencia de las matemáticas mediante un conjunto finito de axiomas y reglas de inferencia. Por su parte, para Henri Poincaré, uno de los padres de la intuición matemática moderna, el infinito debía estar siempre vinculado a una construcción mental concreta, lo que lo llevó a criticar las teorías de conjuntos ingenuas y a desconfiar del formalismo absoluto. Poincaré argumentaba que el infinito actual, como objeto completo, escapaba a la verdadera naturaleza matemática que, para él, debía estar anclada en construcciones finitas y concretas. De hecho, era fiel defensor de que las matemáticas no eran meras manipulaciones formales sino construcciones sustentadas en la intuición humana [29].

Estos esfuerzos se vieron desafiados por los *teoremas de incompletitud* de Kurt Gödel, quien demostró que, en cualquier sistema formal suficientemente potente para incluir la aritmética,

existen proposiciones que no pueden ser ni demostradas ni refutadas dentro del sistema, y que su consistencia no puede ser probada dentro del propio sistema. Estos resultados no solo pusieron en duda el programa formalista de Hilbert, sino que también revelaron límites fundamentales en nuestra capacidad para conocer la verdad matemática [13]. Sin embargo, la crítica al formalismo no terminó ahí. Aún quedaba por resolver una cuestión crucial para el programa hilbertiano: el *problema de la decisión* (Entscheidungsproblem), es decir, la posibilidad de construir un procedimiento general que determinara si un enunciado es demostrable dentro de un sistema formal. Fue en este contexto donde las contribuciones de Alonzo Church y Alan Turing marcaron un nuevo punto de inflexión. Ambos, casi simultáneamente, demostraron de forma independiente que no existe tal procedimiento general, dando lugar a una nueva noción de límite: la *indecidibilidad computacional*. Si Gödel había revelado que no todas las verdades son demostrables, Church y Turing mostraron que no todas las demostraciones pueden ser mecanizadas. Los trabajos de Church y Turing, al delimitar con rigor los alcances de la computación formal, sellaron el ocaso del optimismo hilbertiano.

Mientras Gödel, Church y Turing exploraban los límites internos de los sistemas formales desde una perspectiva lógica y computacional, una crítica de naturaleza muy distinta surgía desde la filosofía del lenguaje. El filósofo Ludwig Wittgenstein, en su obra *Investigaciones filosóficas* [39] —publicada póstumamente— se mostraba profundamente escéptico ante la posibilidad de tratar conceptos como el infinito como objetos matemáticos independientes, definidos por reglas formales. En sus reflexiones sobre el lenguaje y los límites del sentido, Wittgenstein sugirió que la noción de infinito, lejos de ser una realidad matemática autónoma, dependía del uso práctico del lenguaje matemático. Para Wittgenstein, la matemática es una actividad humana ligada al lenguaje y las prácticas sociales, y el infinito sólo existe dentro de ese marco. Esta disputa filosófica evidenció que el infinito, más que una simple noción matemática, encarnaba un conflicto epistemológico: £hasta qué punto la mente humana puede aprehender lo infinito? £Es el infinito una propiedad intrínseca del universo o solo un artefacto de los lenguajes formales?

Este artículo propone seguir el hilo de esa historia dramática: desde la invención del infinito actual por Cantor, pasando por la lucha por los fundamentos de las matemáticas, hasta el golpe propinado por los teoremas de incompletitud de Kurt Gödel y los trabajos de Alan Turing y Alonzo Church. Es la historia de cómo la matemática, al intentar encerrar la verdad en sistemas cerrados y formales, se enfrentó con sus propios límites. Y en ese enfrentamiento, quizás lo más revelador no fue lo que las matemáticas no pudieron demostrar, sino lo que nos dejaron entrever sobre el pensamiento humano: que hay verdades que desbordan cualquier sistema, y que el infinito, más que una cantidad, es una interrogación abierta.

2. Georg Cantor y la invención del infinito moderno

Durante siglos, el pensamiento matemático se desarrolló bajo la convicción de que el infinito no era un objeto matemático legítimo, sino más bien una abstracción filosófica. Aristóteles, por ejemplo, sostenía que el infinito solo podía existir como una potencialidad: el proceso de contar podía continuar indefinidamente, pero no existía tal cosa como un número realmente infinito. En su *Metafísica*, diferenciaba entre un infinito que nunca se alcanza completamente —lo que más tarde se denominaría *infinito potencial*— y la idea de un infinito completo o terminado, que él rechazaba como imposible. Esta visión aristotélica siguió siendo influyente hasta bien entrado el siglo XIX, moldeando los fundamentos filosóficos de las matemáticas y limitando el tratamiento formal del infinito.

Fue en este contexto conservador donde emergió Georg Cantor, un matemático alemán que desafió esta concepción al introducir el *infinito actual* como un objeto legítimo dentro del discurso matemático. Nacido en San Petersburgo y formado en Berlín bajo la influencia de figuras

como Weierstrass y Kummer, Cantor comenzó sus investigaciones sobre la naturaleza de los números reales y su relación con los números naturales. Al hacerlo, sentó las bases de lo que más tarde se conocería como teoría de conjuntos, iniciando así una auténtica revolución conceptual en las matemáticas. El propio Cantor señaló que la tradición matemática "no permitía la existencia de infinitos actuales, limitando el infinito a un concepto potencial o regulativo" [3, p. 223]. Fue únicamente con su obra que el infinito actual se introdujo como un objeto matemático riguroso [15]. En este entorno académico, Cantor comenzó a cuestionar los límites de las matemáticas tradicionales y a explorar nuevas fronteras.



Figura 1. Georg Cantor (1845–1918)[1].

Una de las ideas fundamentales de Cantor fue definir la cardinalidad de un conjunto como su *numerosidad*: la propiedad que permite comparar el tamaño de los conjuntos independientemente de su naturaleza o disposición [1]. Esta idea está estrechamente vinculada a la forma en que dos conjuntos pueden relacionarse mediante una aplicación. Así, dados dos conjuntos A y B, se dice que tienen la misma cardinalidad (o que son equinumerosos) si existe una aplicación biyectiva de A en B. Por el contrario, si existe una inyección de A en B pero no una biyección, entonces A tiene una cardinalidad estrictamente menor que B.

Es intuitivo considerar como conjunto de referencia para tal biyección al conjunto de los números naturales, ya que la idea de numerosidad surge del proceso de ordenar los elementos de un conjunto y contar cuántos hay. De este modo, Cantor demostró que el conjunto de los números naturales es *infinito numerable*. Este descubrimiento fue revolucionario, ya que estableció que no todos los conjuntos infinitos son iguales en tamaño, sino que, al igual que ocurre con los enteros, pueden clasificarse (es decir, algunos son más grandes que otros). En este sentido, no todos los conjuntos infinitos pueden ponerse en correspondencia biyectiva con los naturales, lo que da lugar a diferentes tipos de infinito: el infinito numerable, como en el caso de los enteros, y un infinito mayor, como el de los números reales. Así, Cantor se apartó de la creencia dominante de su época, según la cual solo existía una única forma de infinito potencial [15].

Posteriormente, Cantor demostró que el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ es infinito, pero que su cardinalidad, denotada por $\aleph_0$ (aleph-cero), es la menor de todas las cardinalidades infinitas. En cambio, el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ posee una cardinalidad estrictamente mayor. Una manera de ver esto es a través del famoso *argumento diagonal* de Cantor, que construye una secuencia de dígitos que difiere de cada secuencia en una lista dada de secuencias. En este sentido, los números reales no pueden ser enumerados: forman un conjunto no numerable

[1] `https://www.biografiasyvidas.com/biografia/c/cantor.htm`

[4]. Todo número real en el intervalo $(0,1)$ puede codificarse mediante una representación en base 2 como una secuencia infinita de ceros y unos, y tales secuencias, a su vez, representan subconjuntos de $\mathbb{N}$, lo que muestra que $\mathbb{R}$ es equivalente a $P(\mathbb{N})$: el *conjunto potencia* (o conjunto de las partes o subconjuntos) de los naturales. Por lo tanto, la cardinalidad de $\mathbb{R}$ es distinta de la de $\mathbb{N}$.

El argumento diagonal estableció la existencia de diferentes tamaños de infinito, dando lugar a una jerarquía de cardinalidades infinitas:

$$\mathbb{N}, \quad \mathbb{R} = P(\mathbb{N}), \quad P\left(P\left(\mathbb{N}\right)\right) = P(\mathbb{R}), \quad P\left(P\left(\mathbb{R}\right)\right), \quad \ldots$$

y así sucesivamente. A estas cardinalidades se les asignaron números que Cantor denominó *números transfinitos*. Definió el primer número transfinito como $\aleph_0$: la cardinalidad de los números naturales, denotada por $|\mathbb{N}|$.

Paralelamente al concepto de cardinalidad, Cantor desarrolló la teoría de los ordinales transfinitos, que extienden la noción de orden más allá de lo finito. Introdujo el primer ordinal transfinito, ω, que representa el límite de la sucesión $1, 2, 3, \ldots$. Utilizando reglas de sucesión e iteración, construyó ordinales tales como:

$$\omega + 1, \omega + 2, \ldots, 2\omega, 2\omega + 1, 2\omega + 2, \ldots, 3\omega, \ldots, \omega^2, \ldots, \omega^3, \ldots$$

alcanzando finalmente formas como:

$$\omega^\omega, \omega^{\omega+1}, \ldots, \omega^{2\omega}, \ldots, \omega^{\omega^2}, \ldots, \omega^{\omega^\omega}, \ldots.$$

Aunque estos ordinales ordenan conjuntos infinitos, todos ellos siguen siendo numerables. La distinción entre cardinalidad y ordinalidad, imperceptible en el ámbito finito, se vuelve crítica al tratar con el infinito [1].

Para extender esta teoría, Cantor postuló el *Teorema del Buen Orden*, que afirma que todo conjunto puede ser bien ordenado, es decir, dispuesto de tal forma que todo subconjunto no vacío tenga un primer elemento. Este teorema es esencial para vincular los ordinales con conjuntos de cualquier tipo y constituye una piedra angular del programa transfinito de Cantor. Aquí, Cantor va más allá de su concepción original de número (como medida de cantidad, principalmente para los números naturales) hacia una concepción más abstracta (y, en su tiempo, contraintuitiva) en la que los números sirven como índices que denotan posiciones dentro de una serie. Esto permitió que tanto los números finitos como los transfinitos se subsumieran bajo un concepto unificado. Por ello, terminó afirmando que el Teorema del Buen Orden debía aceptarse como una *ley del pensamiento*, a pesar de que la mayoría de sus contemporáneos estaban en fuerte desacuerdo [1, 13]. Como veremos más adelante con Gottlob Frege, apelar a las leyes del pensamiento se convertiría en un camino privilegiado para fundamentar las matemáticas en la lógica.

Al tratar con el infinito, Cantor se vio obligado a refinar los conceptos de ordinalidad y cardinalidad, y a explorar cómo reconciliarlos con nuestras intuiciones básicas, especialmente ante las aparentemente paradójicas implicaciones de la aritmética transfinita [1, 30]. Estas dos vertientes: los cardinales transfinitos y los ordinales transfinitos, convergerían eventualmente en la sucesión de cardinales transfinitos, o alephs. Más allá de ω, se obtiene una secuencia infinita de cardinalidades distintas de los ordinales: la sucesión de números cardinales. Como hemos visto, los cardinales se diferencian de los ordinales en que solo se ocupan de la distinción de los elementos de un conjunto, sin importar su orden. Cantor asignó al conjunto $[\omega]$ (y a cualquier conjunto equinumeroso con él) la cardinalidad $\aleph_0$, y demostró que entre dos cardinalidades sucesivas $\aleph_i$ y $\aleph_{i+1}$ no existe ningún conjunto cuya cardinalidad sea estrictamente intermedia [9].

Sin embargo, se debe poder determinar la cardinalidad de un conjunto dado. Sabemos que los naturales tienen cardinalidad $\aleph_0$, pero £qué ocurre con los reales? Cantor había demostrado que $\mathbb{R}$ es equinumeroso con el conjunto potencia de los naturales, es decir, $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$, pero no pudo asignar un número alef específico a los reales. Su idea era que el siguiente aleph después de $\aleph_0$ correspondería precisamente a la cardinalidad de los reales: $|\mathbb{R}| = \aleph_1$. De esta manera, no existiría ningún conjunto cuya cardinalidad esté estrictamente entre la de los números naturales y la de los números reales. Esta es la famosa *Hipótesis del Continuo* de Cantor.

Más generalmente, la *Hipótesis del Continuo Generalizada* sostiene que para cualquier conjunto K de cardinalidad $\aleph_i$, su conjunto potencia $\mathcal{P}(K)$ tiene cardinalidad $\aleph_{i+1}$. En otras palabras, incrementar un paso en la secuencia de alephs corresponde a aplicar la operación $K \mapsto \mathcal{P}(K)$, de modo que si $|K| = \aleph_i$, entonces $|\mathcal{P}(K)| = \aleph_{i+1}$. La relación entre dicha hipótesis y el Teorema del buen orden es crucial. Como señala el filósofo y académico Roberto Torretti[34], la Hipótesis del Continuo Generalizada implica el Teorema del Buen Orden (pero no es implicada por él); por lo tanto, solo puede aceptarse como un principio que no es demostrable.

Cantor formuló esta hipótesis, pero nunca pudo probarla. Más tarde se demostraría que es independiente de los axiomas estándar de la teoría de conjuntos; un hecho que transformaría profundamente la epistemología matemática [14].

3. Reacciones, críticas y controversias

La osadía de Cantor no fue bien recibida por todos. Muchos de sus contemporáneos vieron sus ideas con escepticismo, si no con hostilidad. Su antiguo mentor, Leopold Kronecker, encabezó una feroz crítica a la noción de infinito actual. Como firme defensor de una postura constructivista de las matemáticas, basada en lo finito y computable, Kronecker [25] sostenía que solo los números naturales eran "dados por Dios", mientras que todo lo demás era una "invención humana". Para él, los números transfinitos de Cantor eran especulaciones infundadas. En marcado contraste, matemáticos como David Hilbert y Gottlob Frege abrazaron las revolucionarias innovaciones de Cantor. Hilbert, en particular, consideraba el universo de los conjuntos infinitos como un "paraíso" del que las matemáticas nunca debían ser desterradas [21]. La revolución inaugurada por Cantor se había vuelto irreversible. El infinito dejó de ser meramente un límite o una aspiración; se había convertido en un objeto formalizable. Su trabajo sentó las bases de la teoría de conjuntos, que evolucionaría hasta convertirse en el lenguaje fundamental de las matemáticas modernas [9]. Conceptos básicos como función, número, espacio y estructura serían a partir de entonces definidos en términos de conjuntos. Sin embargo, los riesgos inherentes a tratar el infinito como un objeto matemático pronto comenzarían a manifestarse.

3.1. Gottlob Frege y el proyecto logicista

Entre quienes acogieron entusiastamente el giro iniciado por Cantor se encontraba Gottlob Frege, cuya ambición fue aún mayor: no solo aceptó el infinito, sino que aspiró a reconstruir la totalidad de las matemáticas sobre bases puramente lógicas. Así nació el logicismo, un programa que veía en la lógica el fundamento último de las verdades matemáticas [17]. Para Frege, los números no eran meras entidades abstractas, sino conceptos con referencia, rigurosamente definidos dentro de un marco lógico. Los conjuntos, a su vez, se concebían intensionalmente como clases de objetos que satisfacen una propiedad dada [8]. Su lenguaje formal, innovador y altamente estructurado, rompió de manera decisiva con el molde aristotélico al analizar las proposiciones en términos de función y argumento, en lugar de sujeto y predicado.

[2] `https://www.biografiasyvidas.com/biografia/f/frege.htm`

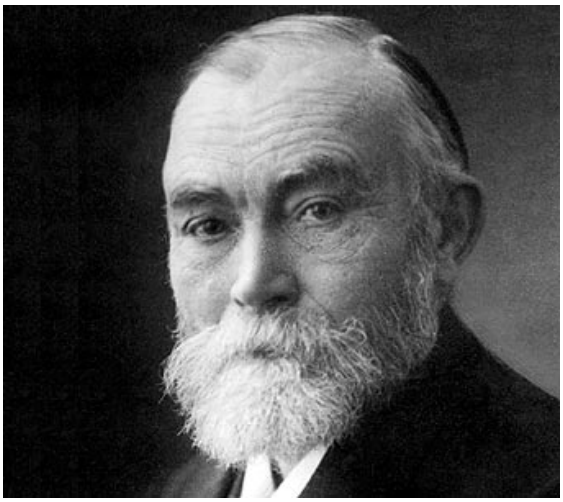


Figura 2. Gottlob Frege (1848–1925)[2].

Esta perspectiva intensional implicaba que los objetos matemáticos no se definían simplemente por sus miembros (como en el enfoque extensional de Cantor), sino por la propiedad que los caracterizaba. Sin embargo, pronto se hicieron evidentes los límites de esta concepción. Surgieron contradicciones dentro del sistema de Frege, lo que llevó finalmente a una separación entre lógica y matemáticas: los conjuntos no podían definirse como conceptos sin incurrir en paradojas [30]. Para muchos matemáticos y lógicos de la época, estas contradicciones señalaban que algo andaba profundamente mal en la teoría de transfinitos de Cantor. En particular, Bertrand Russell descubrió que el sistema de Frege albergaba una contradicción semejante a las ya implícitas en las primeras formulaciones set-theóricas de Cantor [31].

Russell se preguntó si el conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos como miembros se contiene a sí mismo. De aquí surge la paradoja que lleva su nombre. Definió el conjunto A como el conjunto de todos los conjuntos que no son miembros de sí mismos:

$$A = \{x : x \notin x\}.$$

Este conjunto parece estar bien definido en la medida en que, dado un elemento, se puede determinar si pertenece o no al conjunto. Sin embargo, si tomamos $x = A$, nos vemos atrapados en una paradoja. Si $A \in A$, entonces por definición $A \notin A$; a la inversa, si $A \notin A$, entonces $A \in A$. En otras palabras, si tal conjunto existe, £se contiene a sí mismo? Si es así, entonces no debe hacerlo; si no lo hace, entonces debe hacerlo. La contradicción es inevitable.

Esto minó el principio central del logicismo: que los números (y, más ampliamente, toda la matemática) podrían definirse sin ambigüedad a partir de la lógica pura. La paradoja de Russell reveló una inconsistencia estructural en la concepción de los conjuntos como extensiones de conceptos, tal como lo había propuesto Frege. En una carta ahora famosa, el propio Frege [18] reconoció que su sistema se derrumbaba bajo el peso de este descubrimiento. Así, la paradoja de Russell no representó simplemente un obstáculo técnico, sino que cuestionó los fundamentos filosóficos del intento de reducir las matemáticas a la lógica. Esta y otras antinomias, como la *paradoja de Burali-Forti*, demostraron que no toda colección bien definida podía tratarse como un conjunto sin generar contradicciones.

La matemática se enfrentaba ahora a un riesgo existencial: si sus fundamentos eran inconsistentes, todo el edificio lógico construido sobre ellos podría derrumbarse [30]. Se podría pensar que la teoría de conjuntos misma se desintegraría ante tales resultados. Sin embargo, el propio Cantor no se mostró excesivamente preocupado. Respondió afirmando que algunas plurali-

dades, aunque definibles mediante una caracterización verbal, no constituyen una unidad, es decir, un conjunto [4]. En efecto, una pluralidad puede ser de tal naturaleza que la suposición de que todos sus elementos "existan juntos" conduce a la contradicción, y por ello es imposible concebir esta pluralidad como un todo unificado, como "una cosa terminada". Cantor denominó a tales pluralidades *absolutamente infinitas* (o inconsistentes). En cambio, si la totalidad de los elementos de una pluralidad puede concebirse sin contradicción, de modo que pueda captarse como un todo, Cantor la llamó *pluralidad consistente* (o conjunto). Aunque esta distinción no resolvió todas las dificultades, sentó las bases para una teoría de conjuntos más rigurosa y delimitada [34].

Whitehead y Russell [37], en su obra *Principia Mathematica*, intentaron rescatar el proyecto logicista de Frege introduciendo una *jerarquía de tipos*. Esta estratificación tipológica buscaba evitar definiciones circulares y mostraba los costos de adoptar una perspectiva rigurosamente intensional: objetos, propiedades de objetos, propiedades de esas propiedades, y así sucesivamente, se clasificaban en niveles distintos, impidiendo que un elemento perteneciera al mismo tipo que sí mismo. Aunque esta teoría logró resolver las paradojas formales, era compleja y no práctica. Precisamente esta complejidad lógica motivó a Ernst Zermelo [42] a desarrollar una teoría axiomática de conjuntos más manejable, capaz de evitar la paradoja de Russell y las otras antinomias que habían surgido dentro del sistema cantoriano.

3.2. Poincaré, Zermelo y el axioma de elección

A comienzos del siglo XX, Cantor aún no había demostrado ni la Hipótesis del Continuo ni el Teorema del Buen Orden, dejando espacio para la duda entre un segmento no desdeñable y cada vez más crítico de la comunidad científica. Para estos escépticos, las paradojas emergentes sugerían que los programas fundacionales que sustentaban la teoría de conjuntos carecían de la coherencia y rigor necesarios para ser empleados sin serias reservas [30]. El escepticismo de figuras como Henri Poincaré puso en tela de juicio no solo la noción de infinito actual, sino también el uso de definiciones impredicativas, que hacen referencia a totalidades que incluyen al objeto que se está definiendo. Poincaré formuló lo que denominó el *principio del círculo vicioso*, según el cual toda definición circular, por muy lógicamente consistente que sea, es ilegítima desde un punto de vista constructivista [29].



Figura 3. Henri Poincaré (1854–1912)[3].

[3] `https://www.biografiasyvidas.com/biografia/p/poincare.htm`

En respuesta a esta crisis fundacional, Zermelo demostró en 1904 el Teorema del Buen Orden basado en un nuevo principio: el *Axioma de Elección*. Este axioma afirma que dada cualquier familia de conjuntos no vacíos, es posible seleccionar un elemento de cada uno, incluso si no se proporciona una regla explícita para realizar la selección. Apoyándose en este principio, Zermelo pudo mostrar que todo conjunto puede ser bien ordenado [41]. Implícito en este resultado está, por supuesto, el problema más amplio de ordenar el conjunto de los números reales (el continuo cantoriano) y la viabilidad de construir una aritmética transfinita. Lo que Cantor había descrito como una ley del pensamiento, Zermelo lo reformuló como un teorema formal, aunque solo invocando un principio lógico que, si bien no reducible a axiomas más primitivos, se presume tiene aplicabilidad universal en el razonamiento matemático.



Figura 4. Ernst Zermelo (1871–1953)[4].

El uso del axioma de elección suscitó considerable controversia. Mientras que formalistas como Zermelo defendían su legitimidad en términos lógicos, los intuicionistas, liderados por Poincaré, rechazaban su carácter no constructivo. El debate reflejaba una división profunda entre dos concepciones divergentes de la matemática: por un lado, el *formalismo lógico*; por otro, el *intuicionismo constructivo*, una confrontación entre la matemática abstracta y la matemática fundamentada en la construcción [34]. La matemática abstracta apela a principios lógicos generales como justificación última para axiomas como el de elección; la matemática constructiva, en cambio, niega que nuestro pensamiento opere de tal manera, insistiendo en que solo podemos comprender aquello que somos capaces de construir explícitamente. Este compromiso epistemológico sustenta las objeciones de Poincaré. Zermelo, plenamente consciente de estas críticas, respondió argumentando que las definiciones impredicativas se habían empleado ampliamente en matemáticas sin generar contradicción, y que en ausencia de paradojas explícitas, su uso debía considerarse legítimo. Esta postura sentó las bases para el desarrollo posterior del sistema axiomático de ZermeloFraenkel, que eventualmente reemplazaría la teoría de conjuntos y proporcionaría un marco más seguro para el tratamiento del infinito [9].

3.3. Hilbert y el sueño de una matemática completa y consistente

Mientras Zermelo avanzaba en la reconstrucción axiomática de la teoría de conjuntos para evitar las paradojas derivadas de los tratamientos del infinito, David Hilbert concibió un proyecto más ambicioso: fundamentar toda la matemática sobre una base formal, completa y libre de contradicciones [12]. Este programa, conocido como *formalismo hilbertiano*, buscaba eliminar la ambigüedad del pensamiento matemático reemplazándola por la manipulación rigurosa

[4] `https://www.biografiasyvidas.com/biografia/z/zermelo.htm`

de símbolos dentro de un sistema axiomático cerrado. En este marco, los objetos matemáticos, incluidos conjuntos infinitos como los números reales o los números transfinitos cantorianos, debían definirse únicamente por su papel dentro de una estructura axiomática. El significado quedaba subordinado a la estructura formal. Las proposiciones matemáticas se expresaban en un lenguaje lógico simbólico, como el desarrollado por Frege y Russell y Whitehead [16, 38], y su validez dependía exclusivamente de su derivabilidad a partir de los axiomas mediante reglas de inferencia precisamente definidas.

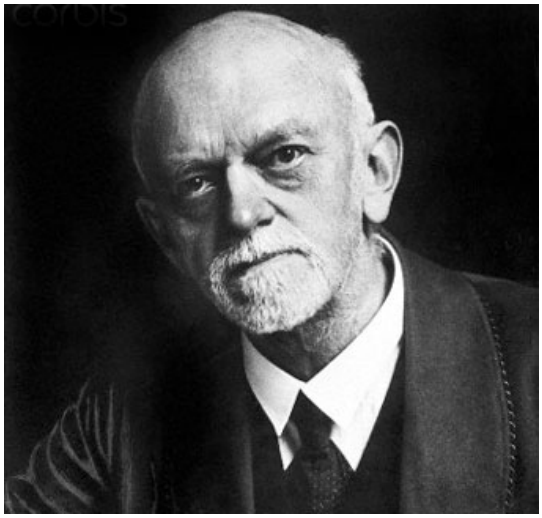


Figura 5. David Hilbert (1862–1943)[5].

Hilbert aspiraba a tratar la matemática como un sistema finito de signos, manipulable mecánicamente. La demostración matemática, bajo esta concepción, se reducía a transformaciones sintácticas de fórmulas, sin recurrir a interpretación semántica alguna. La verdad de una proposición ya no dependía de su contenido, sino de su derivabilidad. En el corazón de esta propuesta estaba la noción de *consistencia*: si un sistema axiomático es consistente (es decir, no conduce a contradicciones), puede considerarse una base válida para el conocimiento matemático [40]. De este modo, Hilbert reemplazó el criterio tradicional de existencia, ya fuera intuitivo o platonista, por un criterio formal: existir es no ser contradictorio [12].

Sin embargo, esta concepción encontró fuerte oposición entre los intuicionistas, encabezados por Brouwer y Poincaré. Rechazaban tanto el uso del infinito actual como la legitimidad de argumentos no constructivos. Para los intuicionistas, la consistencia por sí sola no podía garantizar la existencia, y mucho menos la verdad matemática [29, 36]. La disputa entre formalistas e intuicionistas reveló así una divergencia filosófica profunda sobre la naturaleza de los objetos matemáticos y el estatus de la demostración.

En apoyo a su programa, Hilbert propuso una distinción crucial entre la *matemática formalizada*, entendida como un sistema simbólico autónomo, y la *metamatemática* (o teoría de la demostración), que estudiaría desde un punto de vista externo las propiedades de ese sistema formal, como la consistencia [34]. Mientras que el primer nivel elimina el razonamiento intuitivo, restringiéndose a la inferencia formal, el segundo nivel reintroduce la intuición, lo que Hilbert denominó *razonamiento sustantivo*. Para garantizar la objetividad de este metanivel, Hilbert exigió que adoptara una postura finitista; es decir, que solo empleara construcciones finitas y demostraciones constructivas, las cuales podrían ser aceptadas incluso por los críticos intuicionistas [12]. El formalismo no eliminaba el pensamiento, sino que lo confinaba al análisis externo del sistema. Así, la metamatemática serviría tanto como garante de la consistencia como puente entre la intuición matemática y la lógica simbólica.

[5] `https://www.biografiasyvidas.com/biografia/h/hilbert.htm`

3.4. El Entscheidungsproblem y el ideal de completitud

Uno de los colaboradores más perspicaces del programa de Hilbert fue Thoralf Skolem, quien, pese a sus contribuciones, también reconoció sus limitaciones. Skolem [33] observó que axiomatizar la teoría de conjuntos dentro de la lógica de primer orden socavaba el carácter absoluto de ciertos conceptos fundacionales, como la cardinalidad. Su llamada paradoja: el *teorema de LöwenheimSkolem*, muestra que existen modelos numerables para teorías que postulan conjuntos no numerables. Esto implicaba que los conjuntos concebidos informalmente por los matemáticos no podían caracterizarse exhaustivamente mediante axiomas de primer orden [10]. La crítica de Skolem destaca así la tensión entre intuición y formalismo: en la reconstrucción axiomática, se pierde el significado intuitivo original de los conceptos matemáticos, y en su lugar surge una pluralidad de modelos lógicamente posibles, pero conceptualmente divergentes. En este sentido, el método axiomático demostró ser insuficiente como fundamento último para la matemática.

El *Entscheidungsproblem* (o problema de decisión), encarnaba la esperanza central del programa de Hilbert: la posibilidad de que todas las verdades matemáticas pudieran, en principio, decidirse mediante procedimientos mecánicos, es decir, algoritmos. Formalmente, sea T una teoría matemática representada dentro de un cálculo efectivo K. Un procedimiento de decisión para T sería entonces un algoritmo capaz de determinar, para cualquier fórmula en K, si es derivable o no de los axiomas de T [22]. Resolver este problema habría completado el círculo iniciado por la formalización axiomática: si toda fórmula fuera decidible, la matemática se convertiría en un sistema completo, consistente y totalmente formalizado, en el que la demostración sería indistinguible de la deducción algorítmica. Sin embargo, esta ambición fue decisivamente socavada por Kurt Gödel [19].

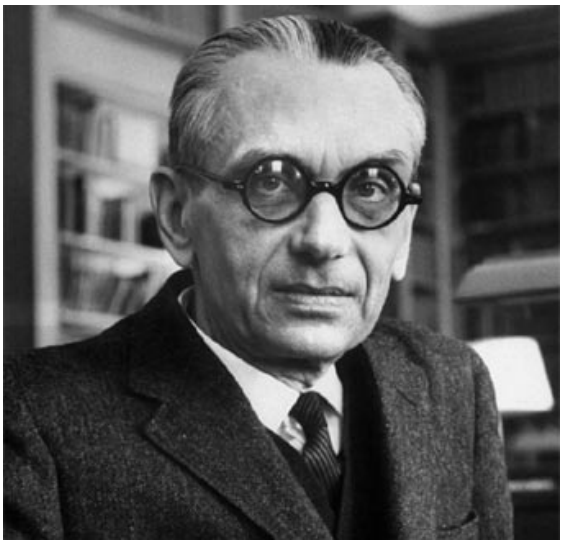


Figura 6. Kurt Gödel (1906–1978)[6].

Con sus *teoremas de incompletitud*, Gödel mostró que ningún sistema formal suficientemente poderoso puede ser a la vez completo y consistente. En particular, siempre existirán proposiciones verdaderas que no pueden demostrarse dentro del sistema. Así, el programa de Hilbert fue desmontado desde dentro, no por las intuiciones filosóficas de sus críticos, sino por los mismos métodos lógicos que Hilbert había defendido como garantes de la verdad matemática. Lo que había comenzado como una aspiración a un dominio total de la razón simbólica terminó en una demostración de sus límites intrínsecos [14]. Los teoremas de Gödel no marcaron solo el

[6] `https://www.biografiasyvidas.com/biografia/g/godel.htm`

fin del optimismo formalista; también abrieron preguntas radicales sobre la naturaleza misma de la verdad matemática. Si existen proposiciones verdaderas pero indemostrables, entonces la verdad matemática no puede equipararse con la demostrabilidad lógica. Esto otorga un apoyo inesperado al platonismo, la visión de que los objetos matemáticos existen independientemente de nosotros, y que el descubrimiento, más que la invención, está en el corazón de la actividad matemática [11].

El propio Gödel era un declarado platonista. Para él, la matemática no era un juego simbólico, sino la exploración de un reino abstracto real, objetivo y eterno. Sus teoremas, aunque técnicamente precisos, pueden interpretarse como una defensa de la idea de que la razón humana accede a verdades que no pueden derivarse mecánicamente. En contraste, intuicionistas y constructivistas vieron en los resultados de Gödel una vindicación de sus críticas: que no todo conocimiento matemático puede capturarse dentro de estructuras formales, y que la matemática es en última instancia una construcción mental guiada por la intuición [14, 36]. Los teoremas de Gödel no representan una derrota de la razón, sino una afirmación de su profundidad. Nos recuerdan, como intuía Wittgenstein [39], que los límites de mi lenguaje son los límites de mi mundo, pero también, como mostró Gödel [20], que el pensamiento puede trascender esos límites. La incompletitud no cierra la matemática; la abre a una dimensión más rica, la del descubrimiento, la intuición y la invención continua de nuevos lenguajes para expresar lo que antes era impensable [14].

4. De la incompletitud a la indecidibilidad

Los teoremas de incompletitud de Gödel desmantelaron desde dentro el edificio logicista, revelando que cualquier sistema formal suficientemente expresivo lleva inscrita la marca de su propia incompletitud. Sin embargo, quedaba por resolver un problema central, que condensaba el ideal hilbertiano: el problema de la decisión. Este problema ya no se preocupaba únicamente por la consistencia o la completitud, sino por la *mecanizabilidad*: £era posible, en principio, construir un procedimiento general (un algoritmo) que pudiera determinar, para cualquier enunciado dado, si éste es demostrable dentro de un sistema formal dado? Esta era la expresión máxima del sueño formalista: una lógica que no sólo fuera verdadera y coherente, sino también computable [5].

Fue en este momento cuando la crítica adoptó su forma más operativa y precisa, no como una limitación lógica abstracta, sino como una imposibilidad formalizada computacionalmente. La refutación ya no surgía sólo de la semántica (la noción de verdad), sino de la propia sintaxis de la computabilidad. Aquí es donde Alan Turing entra en escena, quien casi simultáneamente con Alonzo Church, ofreció una solución negativa al problema de la decisión, pero con un giro conceptual decisivo. Church [6] resolvió negativamente el problema utilizando el cálculo lambda, un sistema lógico basado en funciones recursivas. Demostró que existen funciones para las cuales no es, en general, posible decidir si pertenecen al conjunto de teoremas de una teoría formal dada. Aunque riguroso, el argumento de Church carecía de accesibilidad intuitiva.

Al mismo tiempo que Church, Turing [35] propuso una formulación alternativa, conceptualmente innovadora y profundamente esclarecedora. Introdujo la noción de *máquina de Turing*, un modelo matemático de computación diseñado para formalizar la noción intuitiva de algoritmo o procedimiento efectivo. La máquina consistía en una cinta infinita, un cabezal lector–escritor y un conjunto finito de estados operativos. Esta simplicidad estructural le otorgaba una generalidad sin precedentes: cualquier cálculo realizado por un procedimiento mecánico podía ser simulado por tal máquina. El punto no era la complejidad, sino la generalidad: cualquier procedimiento algorítmico podría, en principio, expresarse mediante dicha máquina. Turing proporcionó así un nuevo lenguaje para pensar la lógica formal; uno que se asemejaba estrechamente

[7] `https://www.privatdozent.co/p/turing-uncomputability`

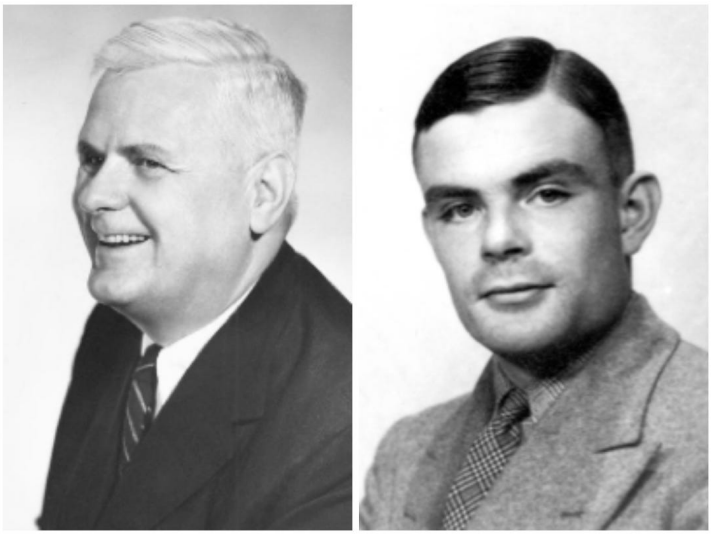


Figura 7. A la izquierda Alonzo Church (1903–1995) y a la derecha Alan Turing (1912–1954)[7].

a las operaciones de una computadora moderna [2]. Esta noción se conectaba directamente con el marco axiomático defendido por Hilbert: un sistema de reglas precisas y manipulables, libre de ambigüedad semántica.

Sin embargo, fue dentro de este mismo marco formalizado y "mecanizado" donde Turing descubrió sus propios límites: el célebre *problema de la parada*. La pregunta se formula fácilmente: dado un programa (o máquina de Turing) y una entrada, £existe un procedimiento general capaz de determinar si la máquina se detendrá o continuará ejecutándose indefinidamente? Turing demostró que no existe tal procedimiento universal. No hay algoritmo capaz de resolver esta cuestión en todos los casos. Su resultado no sólo resolvió el problema de la decisión, sino que reveló una zona oscura dentro de la computación formal: aun cuando las reglas son claras, los resultados no siempre son previsibles. Este resultado constituye una forma de indecidibilidad algorítmica y se erige como el análogo computacional del primer teorema de incompletitud de Gödel: así como existen enunciados verdaderos que no pueden ser probados dentro de un sistema formal, existen funciones bien definidas que no pueden ser decididas algorítmicamente.

Gödel y Turing, desde frentes diferentes pero convergentes, delimitaron la frontera esencial de lo formal. Gödel lo hizo desde dentro del sistema lógico: no todas las verdades son demostrables. Turing lo hizo desde fuera, definiendo los límites estructurales de la computación: no todas las funciones computables son decidibles. Ambos resultados revelan una misma idea: el pensamiento formal tiene fronteras insalvables, y que el cálculo, por riguroso que sea, no puede agotar el dominio de la verdad. Estas ideas cristalizan en la llamada *Tesis de Church-Turing*, que postula que todo procedimiento efectivamente calculable, es decir, todo algoritmo ejecutable en un número finito de pasos, es computable por una máquina de Turing. Esta tesis, aunque no demostrable, ha resistido la prueba del tiempo y se erige como el principio fundacional de la teoría de la computación [27]. Hasta hoy, no se ha descubierto ningún modelo efectivo de computación que la contradiga.

Los resultados de Turing resuenan mucho más allá del ámbito de la computación. Constituyen una crítica implícita y devastadora a las aspiraciones mecanicistas del formalismo. El ideal hilbertiano de una matemática plenamente decidible, gobernada por algoritmos infalibles, se disuelve frente a la prueba de que incluso problemas simples pueden eludir todo procedimiento sistemático. Las matemáticas, al igual que la lógica y la computación, ya no pueden reducirse a pura sintaxis. Turing demuestra que incluso dentro del dominio más estructurado, una máquina definida por reglas precisas, emergen inevitablemente zonas de opacidad. La incompleti-

tud lógica y la indecidibilidad computacional revelan un límite estructural: existen regiones del pensamiento formal que son, en principio, inaccesibles.

El fracaso del ideal de la automatización universal no representa una derrota del pensamiento racional, sino una invitación a reconsiderar el papel de la cognición humana en la construcción matemática. Los sistemas formales pueden agotarse, pero la razón no. La creatividad, la intuición y la comprensión semántica emergen como elementos irreductibles de la práctica matemática. En este sentido, el descubrimiento de Turing refuerza lo que Gödel ya había insinuado: que las capacidades cognitivas humanas trascienden cualquier formalización finita. Como sugieren pensadores como Penrose [28] y Lakatos [26], la mente matemática no se limita a operar dentro de sistemas dados, sino que tiene el poder de generar nuevos para reformular problemas y expandir lo concebible.

Originalmente concebida como un modelo abstracto, la máquina de Turing se ha convertido en una metáfora crítica del pensamiento formal. No es simplemente una herramienta computacional, sino una nueva forma de reflexionar sobre los límites de la lógica, el lenguaje y las matemáticas. Si el siglo XIX buscó una lógica para explicar todo, el XX, a través de Gödel y Turing, reveló que no todo puede ser explicado. El ocaso del algoritmo no es el fin del conocimiento, sino el comienzo de una comprensión más profunda: que la verdad no puede ser programada en su totalidad, que la razón excede la computación, y que siempre hay algo en las matemáticas, como en la humanidad, que escapa a toda mecánica.

5. Epílogo de una tragedia creativa

La historia que hemos recorrido —desde el acto inaugural de Cantor al proclamar que no hay un solo infinito, hasta el golpe final de Gödel al mostrar que no todo puede demostrarse— no es simplemente una historia técnica de avances matemáticos. Es una narrativa profundamente filosófica, que pone en cuestión no solo el contenido de las matemáticas, sino su misma posibilidad, su método, su verdad y su sentido. Cantor abrió el infinito, y con ello, desencadenó una serie de preguntas que ninguna formalización posterior ha logrado cerrar del todo. Su intuición de que existen distintos niveles de lo infinito no solo fue una revolución matemática, sino una osadía metafísica: desafiar la idea de que el infinito era una negación; un símbolo de lo inalcanzable. Al numerarlo, Cantor lo trajo al mundo. Pero al hacerlo, trajo también consigo los "monstruos" lógicos [9], las paradojas, y la necesidad de un nuevo lenguaje para domar la complejidad que había desatado. Zermelo, Russell, Hilbert y tantos otros respondieron con lógica, axiomas, jerarquías, y formaciones rigurosas, intentando restaurar la seguridad perdida. Sin embargo, todo ese esfuerzo, que parecía estar cerca de coronarse en un sistema cerrado, coherente y completo, terminó siendo desafiado desde adentro. Gödel mostró que los propios pilares eran incapaces de sostener el edificio completo: que no hay formalización sin fisuras, que toda teoría poderosa es también frágil, incompleta, limitada por el lenguaje con que se dice.

Y cuando parecía que ya no había más que decir, la computación emergió como un nuevo campo de batalla. El sueño de Hilbert de mecanizar el razonamiento fue formulado de otro modo: £puede una máquina, siguiendo reglas, decidir si un enunciado es verdadero? Alonzo Church y Alan Turing, por caminos distintos, respondieron con un no definitivo. El problema de decisión fue declarado insoluble. La máquina de Turing, ese modelo austero y conceptual, expuso con nitidez los límites del cálculo mecánico. Su imposibilidad para resolver el problema de la parada —determinar si una máquina se detiene o no con cierta entrada— se convirtió en el espejo computacional del teorema de incompletitud: lo indecidible estaba también en la máquina. No fue una derrota de la razón, sino su maduración. La tesis de Church-Turing, al afirmar que todo lo computable se expresa en estos marcos formales, nos dice también que hay un más allá de lo computable, y por tanto, más allá de lo demostrable. La verdad matemática no se agota en el algoritmo. La razón no se reduce al cálculo. Incluso en su expresión más depu-

rada —una cinta infinita de símbolos, un conjunto finito de reglas— el pensamiento humano se encuentra con límites que son, a la vez, puertas hacia otra cosa: lo intuitivo, lo creativo, lo que desafía la sintaxis desde el interior de la semántica. No es casual que tanto Gödel como Turing, cada uno a su modo, apunten hacia una dimensión no formalizable del pensamiento: una que piensa más allá del sistema, pero sin destruirlo. La incompletud no es una grieta por donde se cuela la inconsistencia, sino el espacio donde la matemática respira y se renueva.

Lo que parecía una derrota —la imposibilidad de una matemática total, autoconsistente y completa— es también la apertura hacia una matemática viva, capaz de renovarse, de cuestionarse, de avanzar por caminos no previstos por su propia gramática. Como en las grandes epopeyas, lo trágico no está en fracasar, sino en saberse limitado y aun así avanzar. La incompletud es la forma moderna de la tragedia griega: el héroe que conoce sus límites, pero no renuncia a su destino. Esta es quizás la lección más profunda que nos deja el siglo XX matemático: que la verdad no se agota en el método, que la razón no se reduce al algoritmo, y que incluso en el terreno más abstracto —como el de los números transfinitos— sigue latiendo una dimensión irreductiblemente humana, creativa, y hasta trágica. En esa tensión entre lo demostrable y lo indecidible, entre el axioma y la intuición, se escribe la historia no acabada de las matemáticas. Cantor, Hilbert, Gödel, Church, Turing, ... no son solo nombres de teoremas, escuelas o sistemas formales: son capítulos de una epopeya moderna, donde la mente humana se mide con sus propias creaciones, las desafía, las trasciende, y se deja transformar por ellas. El infinito ya no es solo una idea prohibida o un concepto abstracto. Es, ahora, un espejo que devuelve nuestra imagen, más compleja, más limitada, pero también más libre.

Referencias

[1] J. C. Álvarez, From determination of infinity to innaccessibility of transfinite cardinal numbers, *Crítica. Revista Hispanoamericana de filosofía*, 26/78 (2019), 27–71. https://doi.org/10.22201/iifs.18704905e.1994.956

[2] J. Bagaria, On Turings legacy in mathematical logic and the foundations of mathematics, *Arbor*, 189/764 (2013), a079. http://doi.org/10.3989/arbor.2013.764n6002

[3] G. Cantor, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (trad. E. Zermelo), en E. Zermelo (ed.), *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 18791931*, Harvard University Press, 1955, 212–258 (obra original publicada en 1883).

[4] G. Cantor, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* (trad. J. R. Meyer), Website James R. Meyer, 2021 (obra original publicada en 1883). https://www.jamesrmeyer.com/infinite/cantor-grundlagen

[5] A. Church, A note on the Entscheidungsproblem, *Journal of Symbolic Logic*, 1/1 (1936), 40–41. https://doi.org/10.2307/2269326

[6] A. Church, An unsolvable problem of elementary number theory, *American Journal of Mathematics*, 58/2 (1936), 345–363.

[7] M. Dummett, *The logical basis of metaphysics*, Massachusetts: Harvard University Press, 1991.

[8] M. Dummett, *Frege: Philosophy of mathematics*, Massachusetts: Harvard University Press, 1991.

[9] A. J. Durán, Cien años sin Cantor, *La Gaceta de la RSME*, 21/2 (2018), 259–274.

[10] H.-D. Ebbinghaus, *Ernst Zermelo: An approach to his life and work*, Springer, 2007.

[11] J. FERREIRÓS, Matemáticas y platonismo(s), *La Gaceta de la RSME*, 2/3 (1999), 446–473.

[12] J. FERREIRÓS, Un episodio de la crisis de fundamentos: 1904, *La Gaceta de la RSME*, 7/2 (2004), 449–467.

[13] J. FERREIRÓS, Kurt Gödel: revolución en los fundamentos de las matemáticas, *Arbor*, 183/725 (2007), 409–418. https://doi.org/10.3989/arbor.2007.i725.113

[14] J. FERREIRÓS, *Labyrinth of thought: A history of set theory and its role in modern mathematics*, Birkhäuser, 2007.

[15] A. A. FRAENKEL, *Abstract set theory* (trad. Y. Bar-Hillel), Dover Publications, 2006 (obra original publicada en 1953).

[16] G. FREGE, *Begriflsschrift: A formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought*, Halle: Louis Nebert, 1879.

[17] G. FREGE, *The foundations of arithmetic: A logico-mathematical enquiry into the concept of number* (trad. J. L. Austin, 2ł ed.), Basil Blackwell, 1950 (obra original publicada en 1884).

[18] G. FREGE, *Basic laws of arithmetic: Derived using concept script* (trad. P. A. Ebert & M. Rossberg; intro C. Wright), Vol. II, Oxford University Press, 2013 (obra original publicada en 1903).

[19] K. GÖDEL, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38 (1931), 173–198. https://doi.org/10.1007/BF01700692

[20] K. GÖDEL, What is Cantor's continuum problem?, en P. Benacerraf & H. Putnam (eds), *Philosophy of mathematics*, Prentice-Hall, 1964, 470–485 (obra original publicada en 1947).

[21] D. HILBERT, Über das Unendliche, *Mathematische Annalen*, 95 (1925), 161–190. https://doi.org/10.1007/BF01206605

[22] D. HILBERT & W. ACKERMANN, *Grundzüge der theoretischen Logik*, Springer, 1928.

[23] I. KANT, *Critique of pure reason* (trad. P. Guyer & A. W. Wood), Cambridge University Press, 1998 (obra original publicada en 1781).

[24] K. T. KRAUS, *Kants ideas of reason*, Cambridge: Cambridge University Press, 2025.

[25] L. KRONECKER, On the concept of number, citado en R. Torretti, *El paraíso de Cantor: La tradición conjuntista en la filosofía matemática*, Editorial Universitaria, 1998.

[26] I. LAKATOS, *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*, Cambridge University Press, 1976.

[27] R. J. NELSON, Church's Thesis and Cognitive Science, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 28/4 (1987), 581–609.

[28] R. PENROSE, *The emperors new mind: Concerning computers, minds, and the laws of physics*, Oxford University Press, 1989.

[29] H. POINCARÉ, *Science and hypothesis* (trad. E. Méndez), Clásicos de la Ciencia, 2021 (obra original publicada en 1902).

[30] M. PRADILLA, Paradojas semánticas y lógicas, *Revista de Ingeniería, Matemáticas y Ciencias de la Información*, 2/3 (2015), 87–99.

[31] B. RUSSELL, *The principles of mathematics*, Cambridge University Press, 1903.

[32] S. SHAPIRO, *Philosophy of mathematics: Structure and ontology*, Oxford University Press, 1997.

[33] T. SKOLEM, Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre, *Mathematische Zeitschrift*, 15/1 (1922), 263–285. https://doi.org/10.1007/BF01491349

[34] R. TORRETTI, *El paraíso de Cantor: La tradición conjuntista en la filosofía matemática*, Editorial Universitaria, 1998.

[35] A. M. TURING, On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, en M. Davis (ed), *The undecidable: Basic papers on undecidable propositions, unsolvable problems and computable functions*, Raven Press, 1937, 115–154 (obra original publicada en 1937).

[36] M. VAN ATTEN, *Brouwer meets Husserl: On the phenomenology of choice sequences*, Springer, 2007.

[37] A. N. WHITEHEAD & B. RUSSELL, *Principia mathematica* (Vol. 1), Cambridge University Press, 1910.

[38] A. N. WHITEHEAD & B. RUSSELL, *Principia mathematica* (Vols. 1–3), Cambridge University Press, 1910–1913.

[39] L. WITTGENSTEIN, *Philosophical investigations: The German text, with a revised English translation* (trad. G. E. M. Anscombe, 3ł ed., illustrated), Blackwell, 2001 (obra original publicada en 1953).

[40] R. ZACH, Hilberts program, en E. N. Zalta (ed), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2023 Edition). https://plato.stanford.edu/archives/spr2023/entries/hilbert-program/.

[41] E. ZERMELO, Beweis, daSS jede Menge wohlgeordnet werden kann, *Mathematische Annalen*, 59/4 (1904), 514–516. https://doi.org/10.1007/BF01445300

[42] E. ZERMELO, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I., *Mathematische Annalen*, 65 (1908), 261–281. https://doi.org/10.1007/BF01449999

Sobre el autor:
Nombre: Daniel Martín-Cudero
Correo electrónico: daniel.mcudero@urjc.es
Institución: Universidad Rey Juan Carlos